

## [算数・数学]

## 生徒が主体的に学びを深める数学授業

## － 2 サイクルの「問題づくり」の授業実践－

星 敦子\*

## 1 はじめに

新学習指導要領で、数学科の目標は「数学的活動を通して・・・事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。」とある。

実際、ほとんどの生徒は、「数学は学習しなければいけない教科」「数学は受験で大事な教科」と考えている。NRTの結果は全国平均を超えており基本的な学習内容も身に付いている。しかし、自ら進んで楽しく学習している訳ではないという現実がある。4月に実施したアンケートでは、「数学が好き」と答える生徒は1年生担当クラスでは11%、2年生担当クラスでは3%にすぎなかった。嫌いな理由は、「難しい」「苦手」「つまらない」等である。生徒にとって「テストのため仕方なく学習する数学」から、「数学のよさや学習する楽しさを感じる数学」へと意識を変える必要がある。数学は答えが1つで分かりやすいとか、やり方を覚えれば簡単だと考える生徒もいるが、本当に数学のよさを実感し活用できているか疑問である。少し難しい問題には自分で工夫して解決しようとはしない生徒が多い。以上のことから、主体的に学習に取り組み、自ら問題解決し、数学を学ぶことの楽しさや数学のよさを味わう授業を目指す。特に計算方法を教え、練習問題で習熟を高め、文章問題を解くという授業スタイルになりがちな「数と式」の領域における「問題づくり」の活動が、生徒の学びを深めると考え実践した。

## 2 研究の内容

## (1) 先行研究から

生徒が主体的に取り組める学習活動や課題が必要である。指導要領解説編では、数学的活動のうち、中学校数学科において特に次の活動を重視している。「①既習の数学を基にして数や図形の性質を見だし発展させる活動、②日常生活や社会で数学を利用する活動、③数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動」である。このような数学的活動を通して「自分で考えた」「分かった」「楽しかった」などの経験を積み重ねることが、次の学習の意欲となり主体性を高めると考える。また、既習事項を基に生徒が考え、習得したものを基にさらに発展させる数学的活動が活用力を育てると考える。与えられた問題を解くだけの受け身の学習から、生徒の主体性や多様性・発展性が求められる学習にしていく必要がある。

「問題解決」においては、次の3つの多様性が考えられている。(図1)

- ① 与えられた問題に対して多様な解法を発見する。 (考え方の多様性)
- ② オープンエンドアプローチの問題をする。 (解の多様性)
- ③ 与えられた問題をもとにしていろいろな問題をつくる。 (問題の多様性)

この③が「問題づくり」である。与えられた1つの問題(原題)から出発して、その問題の構成要素を類似なものや一般的なものに置き換えるなどして、新しい問題をつくり、それを解決する活動である。

この「問題づくり」の意義やねらいを、澤田利夫氏は、次の4点にまとめている。

- ① 子どもたち一人一人の主体的、意欲的な学習を促す。
- ② 数学的な見方や考え方の育成を図る。
- ③ 子どもたちの興味・関心や習熟の程度に応じた総合的な学習ができる。
- ④ 子どもたちの探究的な学習活動を主とした問題解決的な学習ができる。

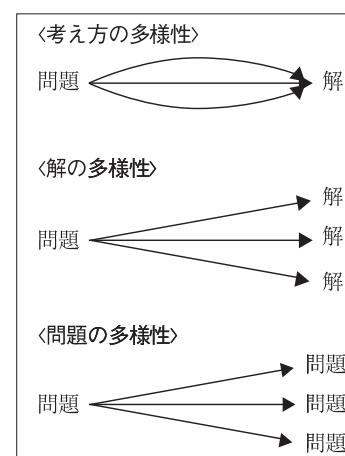


図1 問題解決の多様性

\* 長岡市立大島中学校

また、市川氏の『教えて考えさせる授業』の中でも、考えさせる場面での問題解決の重要性が説かれている。「理解深化」場面で、ただ漠然と問題をつくるのではなく、視点や方法を身に付けることでより数学的に高いレベルの問題がつくれ、主体的に取り組めると考える。生徒が主体的・発展的に学びを深めるには、2サイクルの「問題づくり」を行うことが有効ではないかと考え、実践した。2サイクル行うことで、数学のよさと学ぶことの楽しさを感じさせたい。

橋本吉彦氏は、問題づくりが可能な時期として、次の2つを示している。

① 授業の導入や展開をする場合

② 単元の基本的な学習が終わったあとのまとめや応用をする場合

本実践では、2サイクルの問題づくりを②の場面で取り入れ、それまでの学習と関連づけて行いたい。

長崎栄三氏は問題づくりを図2のように類型している。どのタイプを行うのが最も有効か考えて実践したい。また、問題づくりの授業の流れは図3のように一般的に示されている。これを基本としながら、よりオープンに実践したい。ここで、問題を発展させる先行研究としては、ブラウン＆ワルターの「What-If-Not」の手法がある。仮定のある一部を「もしそうでなかったら」と問題を発展させていく方法である。この手法を使い、問題をつくる視点を考えさせ、身に付けさせていきたい。

## (2) 研究内容

単元の導入では考え方の多様性の問題を、知識・技能の習得場面ではオープンエンドの問題を、単元末には2サイクルの「問題づくり」をそれぞれ行うことにより、生徒は数学的な考え方を学び、主体的に学習する態度を身に付ける。

① 単元の導入では考え方の多様性の問題、基礎的・基本的な知識・技能の習得場面ではオープンエンドの問題をする

単元の導入段階では、操作的活動などの数学的活動を取り入れるなどして、考え方の多様性の問題に取り組ませる。また、知識・技能の習得場面ではオープンエンドの問題に取り組ませ、それまでの学習の深化や一般化を図る。この学習により、数学的な見方・考え方を身に付けさせるとともに、問題を主体的・発展的に考える意欲を育てたい。

② 単元末で「問題づくり」を2サイクル実施する

1サイクル目に「What-If-Not」手法で、原題を発展させる。問題づくりは、それまでの学習で得た考え方を使って行われるので、既習事項を自分なりに整理することになる。また、視点を決めて問題を作ることにより、その問題に内在する数学的なきまりや構造が明らかになったり、一般化が図られたりすることが期待される。視点を決めて問題を発展させることで「問題づくり」の方法も身に付けさせたい。

2サイクル目は単元のまとめとして、より自由に問題づくりを行う。既習の内容や日常生活の中で問題を考えさせる。つくった問題をクラスで共有する。これにより主体的に課題に取り組み、学習したことを進んで活用する態度を身に付けさせたい。

## 3 具体的実践 1 単元名 1年 文字と式 (28名)

### (1) 指導計画

- |           |       |                           |
|-----------|-------|---------------------------|
| ① 文字を使った式 | (2時間) | 〈考え方の多様性〉                 |
| ② 文字式の表し方 | (3時間) |                           |
| ③ 式の値     | (1時間) |                           |
| ④ 1次式     | (1時間) |                           |
| ⑤ 1次式の計算  | (3時間) | 〈解の多様性〉                   |
| ⑥ 文字式の活用  | (4時間) | 規則性の問題・問題づくり 〈考え方・問題の多様性〉 |

### (2) 数学的活動を生かした文字を使った式 〈考え方の多様性〉 (単元1時間目)

「同じ長さのストローを使って正方形を作るとき、ストローは何本必要か。□□□□…□□」という教科書の導入課題である。正方形を1個・2個・・・と増やしたときのストローの本数を確認し課題を把握した。その後、「正方形100個のときストローは何本必要か」と発問した。具体的な数量なため、実際に正方形を100個書くなど様々な方法で課題に取り組み、全員が301本と求めた。次に、求め方を発表して考え方を共有し、この求め方を言葉の式で表して文字式へと発展させた。

- ① 自由に
- ② 生活を基に
- ③ 実験や観察を基に
- ④ 問題を基にして
- ⑤ 数学の性質や概念を使って
- ⑥ 問題の構成要素を置き換えて
- ⑦ 式やグラフなどになるように

図2 問題づくりの類型

- ① 原題の取組
- ② 原題を基にした問題づくり
- ③ つくった問題の発表・分類・整理
- ④ 問題の解決
- ⑤ まとめ・発展

図3 問題づくりの授業の流れ

## (3) 計算結果から式をつくる1次式の計算 〈解の多様性〉 (単元10時間目)

計算方法を学習後、その定着・習熟を深めるために答えから式を求める活動をした。 $( ) + ( ) \times ( ) = -2a$ と式の形を指定した。答えは無限に存在する。生徒は乗除から先に計算することを確認した。さらに、 $+-\times\div$ の四則演算のすべてを使うこと、 $\{ \}$ を使うことと条件を変えていった。考え方の分かった生徒はもっと難しい問題をつくろうと工夫した。

## (4) 学び直しによる文字式の活用 〈考え方の多様性〉 (単元13時間目)

## 〈学習課題〉 100個のとき、いくつ？

単元の導入問題の「同じ長さのストローを使って正方形を作るときストローは何本必要か。」にもう一度取り組んだ。100個という実際の数量で考えてから文字 $n$ を使って文字式で表す活動をした。文字式は操作を表すとともに、その結果を表していることに難しさを感じる生徒は多い。ここでもう一度学び直しをした。2度目なので、「なるべくいろいろな方法で求めよう。」と指示した。すべての生徒が図4のように、4つのいずれかの図または式で表現することができた。さらに形式的な操作により、様々な考え方で解決したこの問題は、文字式を計算すると $3n+1$ という式になることを確認した。導入段階ではできなかったことであり、考え方の表現された式と $3n+1$ と整理された式の両方にそれぞれのよさがあることが確認できた。

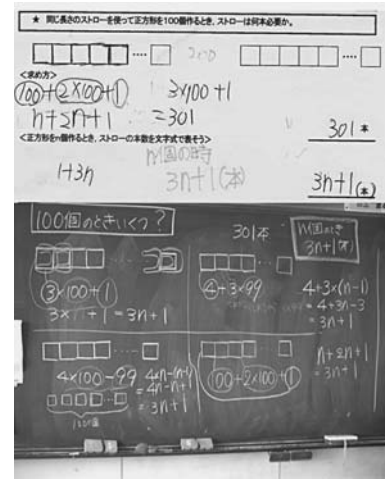


図4

## (5) 「問題づくり」による文字式の活用 〈考え方の多様性〉

## (単元13時間目のつづき)

〈問題1〉 正方形の1辺を5cmとし、正方形を100個作るとき、全体の長方形の周りの長さは？ (1サイクル目①)

(4)の問題を発展させる。「正方形の1辺が5cmだとする。正方形を100個作るとき、辺の数はいくつかな。」と前の問題を整理し、原問題とした。「この問題の、の部分を変えて、別のものを求めよう。」と投げかけた。「全部の辺の長さを足したもの」「面積」などの意見が出た中で、「全体の長方形の周りの長さ」を求める問題にした。この活動で、同じ題材で、求めるものを全体の長方形の周りの長さに変えるという問題づくりの方法を学んだ。本問題も多様な求め方ができる。もともとは教科書のB問題の「～の周りの長さを文字式で表しなさい。」と同じ問題である。だが、原問題と同じ題材であるため、生徒の抵抗感は少ない。「簡単だ」という声も聞かれ、全員が自分なりの答えを書くことができた。仲間のいろいろな考え方を共有することにより、数量の見方を深めていきたいと考え、個→ペア→全体と学習形態を変えた。どのように求めたかを図や式や表を用いて自らの言葉で説明させた。ペアで互いに説明し、その後クラス全体で、図5のように3通りの考え方で解決し共有した。次に、正方形 $n$ 個として文字式で表し、どのような求め方をしても $10n+10$ という答えになることを確認した。

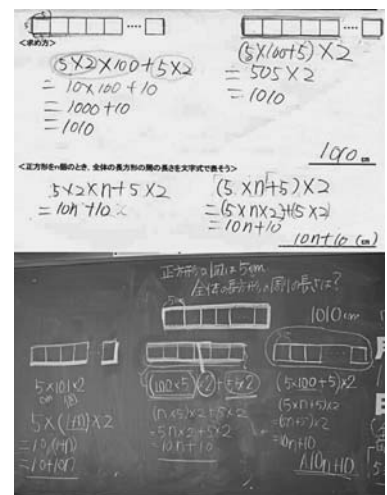


図5

〈問題2〉 縦3cm、横4cmの長方形を100個作るとき、周りの長さは？

(1サイクル目②)

さらに「\_\_\_を違う図形にしたらどうなるか。」と問うと、生徒は「三角形」「六角形」などと答えた。そこで次はもとの図形を長方形に条件変更して問題に取り組んだ。この問題になると生徒は考え方が分かり、「難しい」と言いながらも楽しそうに取り組んでいた。問題1で最も自分が納得した考え方を使い、全員の生徒が自力で解決できた。図6のいずれかの考え方で解決していた。

〈まとめ〉 長方形の並べ方を変えて、周りの長さを考えよう。(2サイクル目)

〈問題2〉を原問題として、長方形の並べ方を自由に変えて問題づくりを行った。途中で授業時間が終了したが、何人もの生徒がまだ課題に取り組んでいた。

## (6) 問題づくりのまとめと発展 (単元14時間目)

全員が作った問題をプリントにして配布した(図7)。「この問題すごい。」という声があがった。まず個人で自由に問題に取り組んだ後、クラス全体で4問を取り上げて確認した。具体的な100個のときを求める考え方を使って文

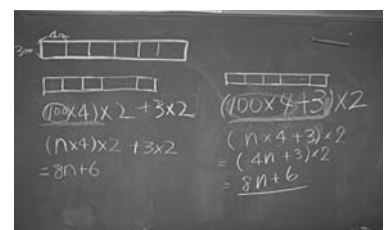


図6

字式で表すことができる。生徒は図を書いたり、表を書いたりしながら問題を解決した。図形的な見方、数列的な見方、関数的な見方の多様な見方で解決を図っていた。28人中24人が問題づくりとそれを文字式で表すことができた。2人が問題づくりまででき、2人が自力で問題作成できなかった。7人は2つ以上の問題を作った。問題を徐々に発展させることにより、生徒は既習事項を活用し、見方・考え方を深め、自分で表現できるようになった。

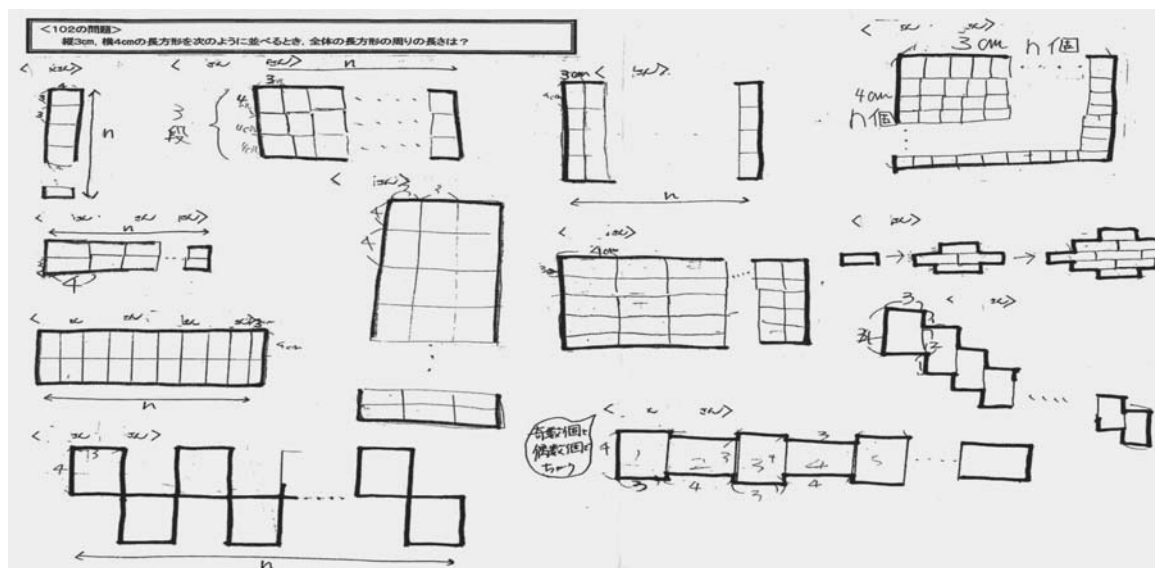


図7

#### 4 具体的実践2 単元名 2年 連立方程式 (28名)

##### (1) 指導計画

- ① 連立方程式の意味……2時間 鶴亀算を題材にして、いろいろな解き方を考える。〈考え方の多様性〉
- ② 連立方程式の解き方…4時間 みかんをりんごの個数と代金を題材に加減法・代入法を導く。〈考え方の多様性〉
- ③ 連立方程式の利用……3時間 代金と個数・速さと道のり・割合の基本問題を解く。
- ④ 連立方程式の活用……3時間 「問題づくり」 〈問題の多様性〉

##### (2) 原題を基にした「問題づくり」の授業 (単元11時間目)

〈課題1〉『1個60円のみかんと1個80円のりんごを、あわせて10個買うと、代金が720円になった。みかんとりんごを、それぞれ何個買ったのか。』をもとに、買うものや個数、代金を変えて問題をつくろう。(1サイクル目)

基本問題で扱った問題を原題としている。連立方程式の解き方から一貫して、みかんとりんごを扱っており、生徒にとって馴染みの深い題材である。

図8のプリント1枚に1問の問題を書く。早くできた生徒は何問作成してもよい。問題を作ったら、まず自分で解答をする。そして、半分に折って他の人に渡して挑戦してもらう。困ったことがあったらグループで相談してもよいし、できた問題はまずグループ内で解きあう。その中で、おもしろい問題や今までにない問題があったら、クラス全体に紹介する。

S1: 1個20円のペンと1個10円の鉛筆をあわせて20個買い、ちょうど600円にしたい。それぞれ何個ずつ買えばよいか。

S2: 1個100円のキノコと1個50円のメロンパンを合わせて12個買い、1000円にしたい。それぞれ何個ずつ買えばよいか。

S3: 1個200円のスイカと1個300円のパイナップルを合わせて100個買い、26800円にしたい。それぞれ何個ずつ買えばよいか。

すぐに問題を作り始めた生徒が多かった。しかし、実際に解きはじめると、「答えが変だ。」という声が上がった。S1のように「マイナスになる。」「わりきれない(整数にならない)。」「というものである。教科書の問題は、解の吟味が必要なものばかりである。連立方程式の解=問題の答えであった。ところが自分で作った問題は、解くと問題にあわない解になるものがほとんどであった。解の吟味の必要性を感じて実行していた。「どうすれば、変な答えにならないか。」と問いかけたところ、「個数と1個の値段を決めて、計算してから合計を出す」という答えが返ってきた。文字を代入すれば成り立つという連立方程式の性質を確認した。また、グループ内で相談しながら解決している



図8



様子が見られた。

### (3) 「問題づくり」による連立方程式の活用 (単元12時間目)

#### 〈課題2〉いろいろな問題をつくろう。(2サイクル目)

前時に作った問題を印刷して配布した後、本時は、原題は与えず、いろいろな問題を作ることを課題とした。教科書・ノート・問題集など何を参考にしてもよいことにした。図9は2回目に生徒の作った問題例である。

S4: 2種類の本A, Bがある。A 3個, B 2個では1940円, A 1個, B 4個では1880円です。A 1個, B 1個の値段はそれぞれいくらか。

S5: 12%の食塩水と28%の食塩水がある。この2種類の食塩水を混ぜ合わせて、22%の食塩水1600gつくることにした。2種類の食塩水をそれぞれ何gずつ混ぜればよいか。

S6: A君はC町に行くのにM山を越えていく。今A君がいる所からC町まで28kmある。M山まで時速4km, M山からC町まで時速6kmである。C町まで6時間かかる。今いる所からM山, M山からC町までそれぞれ何kmでしょう。

S7: ドームの入場料は大人1500円, 子供1200円である。今日の巨人×ヤクルト戦の入場者数は50000人で、入場料の合計は69750000円だった。それぞれ大人と子供は何人か。

S8: ドラえもんがのびた君としずかちゃんに、おこずかいをあげました。のびた君は全体の1/5よりも150円多く、しずかちゃんは全体の3/4よりも50円少なかった。のびた君としずかちゃんが受け取った金額はそれぞれいくらか。

2サイクル目は、連立方程式で解ける問題ならば、どんな問題でもよいとした。1サイクル目よりさらに積極的に取り組む生徒が増えた。S4は、1時間目には、きちんとした答の問題がつくれなかった生徒であるが、2時間目は授業終了まで一生懸命に考え、問題をつくった。S5のような割合の問題、S6のような速さの問題をつくった生徒がそれぞれクラス全体の1/3程いた。どちらかというとな数学を苦手としている生徒が、教科書やノート、ワークなどを参考にしてこのタイプの問題をつくっていた。S7やS8の生徒は独自性を出そうと工夫したタイプである。基本問題以外を原題にして問題をつくったり、数値をかなり複雑にしたり、既習事項の考え方で解くことができて場面設定をまったく違うものにしてあったり、一人一人ができる範囲で工夫していた。問題づくりでは、問題の分類を行ってから、代表される問題を解くことが多いが、今回は、自分で解けたらすぐにグループ内で回して解きあうことにした。そして、グループの中から代表の問題を選んで、全体に紹介した。クラス全員で解いたのはS8である。

## 5 考察

### (1) 「問題づくり」の授業に、生徒は意欲的に取り組む

右のアンケート結果から生徒は意欲的に学習したことが分かる。

計算練習では、かなりの個人差がある。しかし、「問題づくり」

やオープンエンドな問題では、数学が得意不得意にかかわらず、

自分なりの正答がもてる機会が生まれる。時間のある限り、もっと難しいものに挑戦しようとしていた。また、生徒のコミュニケーションが活発になり、仲間のつくった問題に「・・・さんの問題すごい。」とか「自分と同じだ。」とうれしそうに話し合っていた。さらに、自分とは違う解き方に「その考え方の方が簡単だ。」と感心するなど、自己評価や相互評価につながった。原問題からヒントを得て別な問題に気づいたり、仲間がつくった問題からヒントを得たりと、学習の幅が広がり、いろいろ工夫する中で楽しく学習した。自分で問題をつくることができ、解けるとうれしそうである。それが仲間に認められ、さらに自信となる。「問題づくり」は生徒を意欲的かつ主体的にする。

### (2) 授業の導入では考え方の多様性の問題、知識・技能の習得場面ではオープンエンドの問題をすることで、生徒はより深く性質や内容を理解し、数学的な考え方を身に付ける

「問題づくり」やオープンエンドの問題は、通常考え方の反対の思考も必要である。それが定理や既習の内容をより多面的に考えることとなり、深い理解や習熟につながる。さらに、自分の解や問題を吟味する必要性が生まれ、より理解を深める。実践2の連立方程式の実践では、解けない問題をつくった生徒が、実際に解いてみて、単に数字を当てはめただけでは解けないことを経験することにより、関係を考えて数量を決定するようになっていった。実践1の答えから計算式を求める課題では、数だけにとらわれ計算順序が身に付いていない生徒が数名いた。何回も繰り返

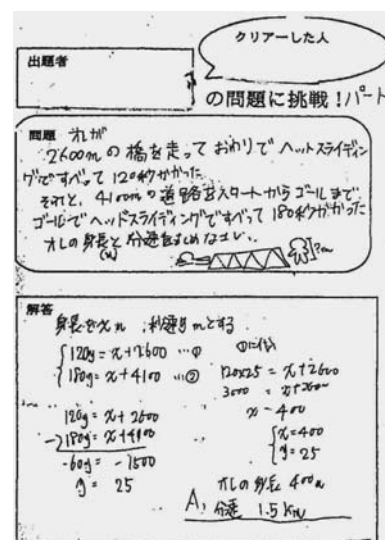


図9

#### 1年A組 (28人) 問題づくり後アンケート

「楽しかった・またしたい」・・・24人 (86%)

「むずかしかった・ふつう」・・・4人 (14%)

返したり、互いにつくった問題を解いたりすることでより深く性質や内容を理解し、数学的な考え方を身に付けた。

実践1の文字と式の導入で扱った課題を、もう一度単元末で扱うことによりさらに理解が深まった。授業では、4通りの考え方に類型化できた。①実際に図を書いて数える。②具体的に数を増やして数列的に考える。③増え方を図形で考える。④正方形の数とストローの数との関係を関数的に考える。どれも数学的に重要な問題解決の考え方である。その考え方を他の生徒に伝えることが必要であった。その際、図や式や表を用いて自らの言葉で伝えることを意識させた。個で考える場面、ペアで考えたり説明したりする場面、一斉学習によるクラス全体で練り上げる場面と活動を広げ、伝えることで理解や考え方を深めることができた。

### (3) 単元末で「問題づくり」を2サイクル実施することで、生徒は考え方を学び、多様な視点で考え、活用しようとする

1サイクル目は「What-If-Not」の手法で条件変更をし、新たな問題をつくった。条件を変えると別の問題に見えていたものが元の問題と同じ考え方で解くことができたり、どんな考え方で同じ結果が得られたりすることが分かり、問題の一般化が図られた。条件変更するものを限定することにより、問題を作ることが容易であり、その後の問題の構成要素や考え方を全員で共有しやすくなった。

2サイクル目はより自由に問題をつくった。1サイクル目で「問題づくり」の手法や考え方や表現の仕方が分かった生徒は、進んで難しい問題をつくろうと挑戦した。問題集に載っていたら敬遠するような問題をつくって互いに解き合っていた。2サイクル目は今まで学習したことを統合する活動である。実践1は原題をさらに発展させ、「数や図形の性質を見いだし発展させる」数学的活動をねらった。問題づくりにおいて多様な発展が期待でき、数と式・図形・関数の考え方の要素を含んだ題材であるからである。実践2は原題から離れて自由に問題づくりを行うことにより、「日常生活や社会で数学を利用する」数学的活動を重視した。生徒の授業振り返りの記述には「少し難しいところもあったけど、だんだんできるようになったのでよかった。頭がたくさん使えたし、とても楽しかった。」「今日の授業で復習もできたし、いろいろな求め方があることが分かった。これからの中で生かしていきたい。」「今日の授業で、私は計算しているより式を考える方が楽しかった。もっといろいろな問題をしたい。」というものがあつた。考え方を学び、なぜそうなるかが分かったときに生徒は感動し、納得し、さらに意欲をもって学ぶ。また「規則性は身の回りでもよく使うので生活の中でも使ってみたい。」というものもあつた。単なる知識ではなく、思考力・判断力・表現力が培われ、活用の意欲につながった。

## 5 まとめと今後の課題

問題づくりやオープンエンドアプローチによる多様な考えを生かした問題解決の授業は、生徒の主体的な学習活動を促すことが確認できた。また、既習の学習の理解を深め、知識や技能を統合して活用する態度や意欲を高めることも分かった。単元全体を通じて継続的に取り組んだことにより、生徒は問題を多様に見て考える大切さとその方法を身に付けた。知識や技能を習得し、様々な視点で考え直し、それを活用して新たな問題に取り組むことを繰り返すことが有効であった。問題づくりの授業は、個で考える集中した時間と、活発な話し合いと互いの認め合いの時間がある授業である。

「4月から7月までの4ヶ月間の授業を通して、数学の力が伸びたと思うか。」のアンケート結果では、「とても伸びた」71%、「少し伸びた」29%、「あまり伸びない」0%であった。「もっとこのような考える授業をしたい」という生徒の声が多い。今後は、他の単元でも、生徒が主体的に学習し、楽しく数学の力の高める授業を考えて実践していきたい。

## 参考文献

- 市川伸一 「「教えて考えさせる授業」を創る 基礎基本の定着・深化・活用を促す「習得型」授業設計」 (図書文化 2008)
- 島田茂編著 「新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ」 (東洋館出版社 1995)
- 竹内芳男・澤田利夫編著 「問題から問題へ」 (東洋館出版社 1984)
- 中学校・楽しい数学の授業編集部 「楽しい数学の授業Vol. 6」 (明治図書 1998)
- 中野洋二郎・坪田耕三・滝井章編著 (橋本吉彦執筆) 「子どもが問題をつくる」 (東洋館出版社 1999)
- 長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦 「豊かな数学の授業を創る」 (明治図書 2009)
- 長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦 「新たな数学の授業を創る」 (明治図書 2009)
- ブラウン・ワルター 「いかにして問題をつくるか」 (東洋館出版社 1990)
- 文部科学省 「中学校学習指導要領解説 数学編」 (2008)